14. ИНТЕГРАЛИ СА ПАРАМЕТРОМ

ОСНОВНИ ПОЈМОВИ

14.1. Дефиниција. Нека је A скуп (било какав), и $J \subseteq \mathbf{R}$ интервал, и нека је $f : A \times J \to \mathbf{R}$ функција, таква да је за све $\alpha \in A$ пресликавање $x \mapsto f(\alpha, x)$ интеграбилно на J (у својственом или несвојственом смислу - свеједно). Функција $h : A \to \mathbf{R}$

$$h(\alpha) = \int_J f(\alpha, x)\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

назива се *интеграл са параметром.* Уколико смо у могућности да нађемо експлицитан израз за функцију h, на пример, тако што је интеграл функције $x \mapsto f(\alpha, x)$, израчуњив, као неодређени за све α, онда се испитивање особина функције h може извести методима диференцијалног рачуна. И то није ништа ново. Ова глава посвећена је изучавању особина функције h и онда када нисмо у могућности да нађемо експлицитан израз за функцију h.

14.2. Став [ситна правила]. Нека је $A \subseteq \mathbf{R}$.

а) Ако је за све x $f(\alpha, x) \leq f(\beta, x)$, кад год је $\alpha \leq \beta$, онда је функција h растућа; слична тврдња важи када се ставе знаци $<$, $\geq$, $>$, и тада је функција h редом строго растућа, опадајућа, строго опадајућа;

б) Ако је A интервал у $\mathbf{R}$, и за свако x пресщликавање $\alpha \mapsto f(\alpha, x)$ конвексно, онда је и h конвексна функција; исто и за строго конвексна, конкавна, строго конкавна;

в) Ако је J коначан интервал и f ограничена на $A \times J$, онда је и h ограничена.

Доказ. Тривијално. $\square$

ИНТЕГРАЛ ПО КОМПАКТНОМ ИНТЕРВАЛУ

У овом одељку, све време биће $J = [a, b] \subseteq \mathbf{R}$, односно

$$h(\alpha) = \int_a^b f(\alpha, x)\,\mathrm{d}x.$$

14.3. Став [лимес, непрекидност]. а) Нека је A скуп на коме је дефинисана конвергенција. Ако је $\lim\limits_{\alpha\to\alpha_0} f(\alpha, x) = g(x)$, равномерно по $x \in [a, b]$, тада је

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} h(\alpha) = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x;$$

б) Нека је $A \subseteq \mathbf{R}^k$, и нека је $f : A \times [a, b] (\subseteq \mathbf{R}^{k+1}) \to \mathbf{R}$ непрекидна функција, тада је и h непрекидна.

Доказ. а) То је, заправо, Став 13.14 главе Раномерна конвергенција;

б) Фиксирамо $\alpha_0 \in A$. Постоји компактан скуп $K \subseteq A$ такав да $\alpha_0 \in \operatorname{int} K$; тада је и $K \times [a, b]$ такође компактан. Према Канторовој теореми, f је равномерно непрекидна на $K \times [a, b]$, то јест

$$\forall\varepsilon > 0\,\exists\delta > 0\,\forall\alpha', \alpha'' \in K\,\forall x', x'' \in [a, b]\,||(\alpha', x') - (\alpha'', x'')|| < \delta \Rightarrow \\ |f(\alpha', x') - f(\alpha'', x'')| < \varepsilon.$$

Како $\alpha_0 \in \operatorname{int} K$, то је K нека околина тачке α_0 и за ту околину важи

$$\forall\alpha \in K\,\forall x \in [a, b]\,||(\alpha, x) - (\alpha_0, x)|| < \delta \Rightarrow |f(\alpha, x) - f(\alpha_0, x)| < \varepsilon,$$

то јест да $f(\alpha, x) \rightrightarrows f(\alpha_0, x)$ равномерно по $x \in [a, b]$, па $f(\alpha, x) \to f(\alpha_0, x)$ равномерно. Применимо тачку а). $\square$

14.4. Став [диференцирање]. Нека је $A \subseteq \mathbf{R}$, $f : A \times [a, b] \to \mathbf{R}$. Ако је f диференцијабилна по α за све x, и ако је функција $\dfrac{\partial f(\alpha, x)}{\partial\alpha}$ непрекидна на $A \times [a, b]$, тада је h диференцијабилна и важи

$$h'(\alpha) = \int_a^b \frac{\partial f(\alpha, x)}{\partial\alpha}\,\mathrm{d}x.$$

Доказ. Према Лагранжовој теореми о средњој вредности постоји $\theta \in (0, 1)$ тако да важи

$$\frac{h(\alpha + \triangle\alpha) - h(\alpha)}{\triangle\alpha} = \frac{1}{\triangle\alpha}\int_a^b (f(\alpha + \triangle\alpha, x) - f(\alpha, x))\,\mathrm{d}x = \\ = \frac{1}{\triangle\alpha}\int_a^b \triangle\alpha\frac{\partial f(\alpha + \theta\triangle\alpha, x)}{\partial\alpha}\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\partial f(\alpha + \theta\triangle\alpha, x)}{\partial\alpha}\,\mathrm{d}x.$$

Међутим, последњи интеграл тежи ка $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial\alpha}(\alpha, x)\,\mathrm{d}x$, јер је функција $\frac{\partial f}{\partial\alpha}$ непрекидна. $\square$

У вежбању 28 може се видети шта се збива када $\frac{\partial f}{\partial\alpha}$ није непрекидна у α_0 макар за једно x.

14.5. Став [Лајбниц]. Нека су φ и ψ диференцијабилне функције реалне промењљиве, и нека је

$$h(\alpha)=\int_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} f(\alpha,x)\,\mathrm{d}x,$$

и нека f задовољава услове претходног Става. Тада је h диференцијабилна функција, и важи

$$h'(\alpha)=\int_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)}\frac{\partial f(\alpha,x)}{\partial\alpha}\,\mathrm{d}x+f(\alpha,\psi(\alpha))\psi'(\alpha)-f(\alpha,\varphi(\alpha))\varphi'(\alpha).$$

Прецизније, домен функције f је скуп $\{(\alpha,x)\,|\,\alpha\in A,\varphi(\alpha)\le x\le\psi(\alpha)\}$.

Доказ. Фиксирамо $\alpha_0\in A$, и за $\alpha\in(\alpha_0-\delta,\alpha_0+\delta)$ имамо

$$h(\alpha)=\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\alpha_0)} f(\alpha,x)\,\mathrm{d}x+\int_{\varphi(\alpha_0)}^{\psi(\alpha_0)} f(\alpha,x)\,\mathrm{d}x+\int_{\psi(\alpha_0)}^{\psi(\alpha)} f(\alpha,x)\,\mathrm{d}x. \tag{2}$$

Извод средњег сабирка имамо у претходном Ставу. Потражимо за трећи. Нека је $g(\alpha)=\int_{\psi(\alpha_0)}^{\psi(\alpha)} f(\alpha,x)\,\mathrm{d}x$, и имамо

$$\frac{g(\alpha+\triangle\alpha)-g(\alpha)}{\triangle\alpha}=\frac{1}{\triangle\alpha}\left[\int_{\psi(\alpha_0)}^{\psi(\alpha+\triangle\alpha)} f(\alpha+\triangle\alpha,x)\,\mathrm{d}x-\int_{\psi(\alpha_0)}^{\psi(\alpha)} f(\alpha,x)\,\mathrm{d}x\right]=$$

$$=\frac{1}{\triangle\alpha}\int_{\psi(\alpha_0)}^{\psi(\alpha)}(f(\alpha+\triangle\alpha,x)-f(\alpha,x))\,\mathrm{d}x+\frac{1}{\triangle\alpha}\int_{\psi(\alpha)}^{\psi(\alpha+\triangle\alpha)} f(\alpha+\triangle\alpha,x)\,\mathrm{d}x=S_1+S_2.$$

Први сабирак, као у претходном Ставу конвергира

$$S_1\to\int_{\psi(\alpha_0)}^{\psi(\alpha)}\frac{\partial f(\alpha,x)}{\partial\alpha}\,\mathrm{d}x,$$

а за други имамо

$$\begin{aligned}S_2&=\frac{1}{\triangle\alpha}\int_{\psi(\alpha)}^{\psi(\alpha+\triangle\alpha)} f(\alpha+\triangle\alpha,x)\,\mathrm{d}x=\\&=\frac{1}{\triangle\alpha}f(\alpha+\triangle\alpha,\xi)(\psi(\alpha+\triangle\alpha)-\psi(\alpha))\quad\text{по првој т о ср вр}\\&\to f(\alpha,\psi(\alpha))\psi'(\alpha)\end{aligned}$$

Слично је и извод првог сабирка у (2) једнак $-f(\alpha,\varphi(\alpha))\varphi'(\alpha)$. □

14.6. Став [Интеграција]. Нека је $A=[c,d]$ и $f:[c,d]\times[a,b]\to\mathbf{R}$ непрекидна. Тада је

$$\int_c^\gamma\int_a^b f(\alpha,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\alpha=\int_a^b\int_c^\gamma f(\alpha,x)\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}x, \tag{3}$$

за све $c\le\gamma\le d$.

Доказ. Према Ставу 7.19, функција $\gamma\mapsto\int_c^\gamma f(\alpha,x)\,\mathrm{d}\alpha=\psi(\alpha,x)$ је диференцијабилна по γ, а њен извод једнак је

$$\frac{\partial\psi}{\partial\gamma}(\gamma,x)=f(\gamma,x),$$

што је непрекидна функција, па према Ставу 14.4 имамо

$$\frac{\partial}{\partial\gamma}\int_a^b \psi(\gamma,x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\partial}{\partial\gamma}\psi(\gamma,x)\,\mathrm{d}x,$$

односно

$$\frac{\partial}{\partial\gamma}\int_a^b\int_c^\gamma f(\alpha,x)\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(\alpha,x)\,\mathrm{d}x,$$

а последње је непрекидна функција по α, па резултат добијамо Њутн-Лајбницовом формулом. $\square$

Примедба: Наведена једнакост је посебан случај Фубинијеве теореме, јер је свака непрекидна функција на $[c,d]\times[a,b]$ интеграбилна на том скупу. Дакле, важи и општије, једнакост (3) важи и када је f интеграбилна и обе стране имају смисла.

РАВНОМЕРНА КОНВРЕГЕНЦИЈА НЕСВОЈСТВЕНИХ ИНТЕГРАЛА

У овом пглављу биће речи о ситуацији када је интеграл интеграције некомпактан, односно, када је интеграл који се јавља у (1) несвојствен. Као и иначе када је реч о несвојственим интегралима, разматраћемо искључиво случај интервала $[a,b)$. Остали се разматрају аналогно.

14.7. Дефиниција. Нека је $f(\alpha,x)$ локално интеграбилна на $[a,b)$ за свако $\alpha\in A$. Тада смо у могућности да дефинишемо функцију $F: A\times[a,b)\to\mathbf{R}$ са $F(\alpha,u)=\int_a^u f(\alpha,x)\,\mathrm{d}x$.

Кажемо да интеграл $\int_a^{b-} f(\alpha,x)\,\mathrm{d}x$ равномерно конвергира по $\alpha\in B\subseteq A$, ако $F(\alpha,u)\rightrightarrows h(\alpha)$, кад $u\to b-$ равномерно по $\alpha\in B$. Кажемо да конвергира *локално равномерно* ако свако $\alpha\in B$ има околину у којој $F(\alpha,u)\rightrightarrows h(\alpha)$, и све редом дефинишемо на тај начин: апсолутно, нормално, итд, као у параграфу 13.17.

14.8. Став [ситна правила]. а) Ако интеграли

$$\int_a^{b-} f(\alpha,x)\,\mathrm{d}x \quad \text{и} \quad \int_a^{b-} g(\alpha,x)\,\mathrm{d}x$$

равномерно конвергирају на скупу B, тада равномерно конвергира и интеграл

$$\int_a^{b-}\left(\lambda f(\alpha,x)+\mu g(\alpha,x)\right)\,\mathrm{d}x,$$

на скупу B, при чему су $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$;

б) Интеграл $\int_a^{b-} f(\alpha,x)\,\mathrm{d}x$ равномерно конвергира по $\alpha\in B$ ако и само ако за све $\varepsilon>0$ постоји $u_0\in[a,b)$ такво да за све $v\geq u\geq u_0$ и све α вреди

$$\left|\int_u^v f(\alpha,x)\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$$

.

(Кошијев критеријум);

в) Ако је за све α, $|f(\alpha,x)|\leq\varphi(x)$ и $\int_a^{b-}\varphi(x)\,\mathrm{d}x<+\infty$, тада интеграл $\int_a^{b-} f(\alpha,x)\,\mathrm{d}x$ равномерно конвергира. (Вајерштрасов критеријум);

г) Ако интеграл $\int_a^{b-} f(\alpha,x)\,\mathrm{d}x$ нормално конврегира, тада он равномерно конвергира.

Доказ. а) Следи из

$$\lambda F(\alpha,x)+\mu G(\alpha,x)\rightrightarrows \lambda F(\alpha,b-)+\mu G(\alpha,b-);$$

б) Довољно је применити Кошијев услов на фамилију функција $F(\alpha,u)$;
в) и г) следе из б). □

14.9. Став [Дини]. Нека је $f: A\times[a,b)\to\mathbf{R}$ позитивна функција. Ако је пресликавање $\alpha\mapsto f(\alpha,x)$ непрекидно (по α) за све $x\in[a,b)$ и ако је пресликавање $\alpha\mapsto\int_a^{b-} f(\alpha,x)\,\mathrm{d}x$ непрекидно, тада $\int_a^{b-} f(\alpha,x)\,\mathrm{d}x$ равномерно конвергира по $\alpha\in K$, где је K произвољан компактан подскуп скупа A.

Доказ. Фамилија функција $\alpha\mapsto F(\alpha,u)=\int_a^u f(\alpha,x)\,\mathrm{d}x$ је растућа по u, и непрекидна по α, па се може применити Динијев критеријум 13.19. □

14.10. Абелов и Дирихлеов критеријум. Нека су $f,g: A\times[a,b)\to\mathbf{R}$, и нека је $x\mapsto g(\alpha,x)$ монотоно за све α. Ако важи барем један од следећа два услова:

(А) Интеграл $\int_a^{b-} f(\alpha,x)\,\mathrm{d}x$ равномерно конвергира, а $|g(\alpha,x)|\le M$ (g је равномерно ограничена);

(Д) Важи неједнакост $\left|\int_a^u f(\alpha,x)\,\mathrm{d}x\right|\le M$, и $g(\alpha,x)\rightrightarrows 0$, кад $x\to b-$;

тада интеграл $\int_a^{b-} f(\alpha,x)g(\alpha,x)\,\mathrm{d}x$ равномерно конвергира.

Доказ. Како је g монотона, према другој теореми о средњој вредности имамо

$$\int_u^v f(\alpha,x)g(\alpha,x)\,\mathrm{d}x = g(\alpha,u)\int_u^\xi f(\alpha,x)\,\mathrm{d}x + g(\alpha,v)\int_\xi^v f(\alpha,x)\,\mathrm{d}x. \tag{4}$$

У случају (А), за дато $\alpha>0$ уочимо u_0 довољно блиско тачки b тако да за све $v,u\in(u_0,b)$ важи

$$\left|\int_u^v f(\alpha,x)\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon/2M,$$

а то можемо због Кошијевог критеријума. Тада из (4) следи

$$\left|\int_u^v f(\alpha,x)g(\alpha,x)\,\mathrm{d}x\right|\le M\left(\left|\int_u^\xi f(\alpha,x)\,\mathrm{d}x\right|+\left|\int_\xi^v f(\alpha,x)\,\mathrm{d}x\right|\right)\le$$
$$\le M(\varepsilon/2M+\varepsilon/2M)=\varepsilon.$$

У случају (Д), за дато $\varepsilon>0$ уочимо u_0 довољно блиско тачки b тако да за све $u\in(u_0,b)$ и све α важи $|g(\alpha,u)|\le\varepsilon/4M$. Тада из (4) имамо

$$\left|\int_u^v f(\alpha,x)g(\alpha,x)\,\mathrm{d}x\right|\le\frac{\varepsilon}{4M}2M+\frac{\varepsilon}{4M}2M=\varepsilon,$$

узимајући у обзир да је $\left|\int_u^\xi f(\alpha,x)\,\mathrm{d}x\right|=\left|\int_a^\xi-\int_a^u\right|\le M+M=2M$. □

ОПЕРАЦИЈЕ НАД НЕСВОЈСТВЕНИМ ИНТЕГРАЛИМА

Несвојствени параметарски интеграл је објекат добијен комбинацијом обичног параметарског интеграла (преко компактног скупа) и лимеса. Стога се сва правила за извођење опарација над несвојственим параметарским интегралима доказују комбинујући одговарајуће ставове о обичним параметарским интегралима и граничној вредности.

14.11. Став [гранична вредност]. Ако $f(\alpha, x)$ конвергира ка $f_0(x)$, локално равномерно по $x \in [a, b)$ (односно равномерно на сваком $[a, u] \subseteq [a, b)$), кад $\alpha \to \alpha_0$, и $\int_a^{b-} f(\alpha, x)\,\mathrm{d}x$ равномерно конвергира по α из неке околине тачке α_0, тада је

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} \int_a^{b-} f(\alpha, x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{b-} f_0(x)\,\mathrm{d}x.$$

Доказ. Имамо

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha\to\alpha_0} \int_a^{b-} f(\alpha, x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{\alpha\to\alpha_0} \lim_{u\to b-} \int_a^{u} f(\alpha, x)\,\mathrm{d}x = \\ &= \lim_{u\to b-} \lim_{\alpha\to\alpha_0} \int_a^{u} f(\alpha, x)\,\mathrm{d}x = \\ &= \lim_{u\to b-} \int_a^{u} f_0(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{b-} f_0(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

При томе, други ред следи на основу Теореме о комутативности лимеса, јер $\lim\limits_{u\to b-}$ (односно $\int_a^{b-} f$) равномерно конвергира по α из неке околине тачке α_0, а трећи ред следи на основу Става 14.3. □

14.12. Став [непрекидност]. Ако је $f(\alpha, x)$ непрекидна функција (као функција две променљиве), и ако $\int_a^{b-} f(\alpha, x)\,\mathrm{d}x$ локално равномерно конвергира, тада је функција $h(\alpha) = \int_a^{b-} f(\alpha, x)\,\mathrm{d}x$ непрекидна.

Доказ. Из непрекидности функције f следи, као и у доказу Става 14.3, да $f(\alpha, x) \rightrightarrows f(\alpha_0, x)$, кад $\alpha \to \alpha_0$. Применимо претходни Став. □

14.13. Став [диференцирање]. Нека је

1° $f : A \times [a, b) \to \mathbf{R}$ диференцијабилна по α за све $x \in [a, b)$, а функција $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ је неопрекидна на скупу $A \times [a, b)$;

2° Интеграл $\int_a^{b-} f(\alpha, x)\,\mathrm{d}x$ ковергира за бар једно $\alpha \in A$;

3° Интеграл $\int_a^{b-} \frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha, x)\,\mathrm{d}x$ конвергира локално равномерно по α.

Тада је функција $h(\alpha) = \int_a^{b-} f(\alpha, x)\,\mathrm{d}x$ диференцијабилна и важи

$$h'(\alpha) = \int_a^{b-} \frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha, x)\,\mathrm{d}x.$$

Доказ. Функција $h(\alpha)$ је гранична вредност фамилије функција $F(\alpha, u) = \int_a^{u} f(\alpha, x)\,\mathrm{d}x$, кад $u \to b-$. Због услова 1°, према Ставу 14.4, функција F је диференцијабилна по α и важи

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha}(\alpha, u) = \int_a^{u} \frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha, x)\,\mathrm{d}x.$$

Према услову 2° фамилија $F(\alpha, u)$ конвергира кад $u \to b-$, за бар једно α, а према услову 3° фамилија $\frac{\partial F}{\partial \alpha}(\alpha, u)$ конвергира локално равномерно ка интегралу $\int_a^{b-} \frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha, x)\,\mathrm{d}x$, па се на њу може применити Став 13.16, одакле је

$$h'(\alpha) = \lim_{u \to b-} \frac{\partial F}{\partial \alpha}(\alpha, x) = \int_a^{b-} \frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha, x)\,\mathrm{d}x.$$

□

14.14. Став [**интеграција**]. а) Нека је $f : [c, d] \times [a, b)$ непрекидна функција, и нека $\int_a^{b-} f(\alpha, x)\,\mathrm{d}x$ равномерно конвергира по $\alpha \in [c, d]$. Тада је

$$\int_c^d \int_a^{b-} f(\alpha, x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\alpha = \int_a^{b-} \int_c^d f(\alpha, x)\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}x;$$

б) Нека је $f : [c, d) \times [a, b) \to \mathbf{R}$ финкција са следећим својствима:

(1) f је непрекидна;

(2) интеграл $\int_a^{b-} f(\alpha, x)\,\mathrm{d}x$ ковергира локално равномерно по $\alpha \in [c, d)$ (односно равномерно на сваком $[c, \gamma] \subseteq [c, d)$), а $\int_c^{d-} f(\alpha, x)\,\mathrm{d}\alpha$ конвергира локално равномерно по $x \in [a, b)$;

(3) бар један од интеграла

$$\int_a^{b-} \int_c^{d-} |f(\alpha, x)|\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}x \qquad \int_c^{d-} \int_a^{b-} |f(\alpha, x)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\alpha \tag{5}$$

је коначан.

Тада је

$$\int_c^{d-} \int_a^{b-} f(\alpha, x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\alpha = \int_a^{b-} \int_c^{d-} f(\alpha, x)\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}x.$$

Доказ. а) За све $\beta < b$, на основу Става 14.6 имамо

$$\int_c^d \int_a^{\beta} f(\alpha, x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\alpha = \int_a^{\beta} \int_c^d f(\alpha, x)\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}x.$$

На десној страни ће се појавити $\int_a^{b-} \int_c^d$, а на левој $\lim\limits_{\beta \to b} \int_c^d \int_a^{\beta}$, па је за завршетак доказа довољно показати да $\lim\limits_{\beta \to b}$ и $\int_c^d$ могу да замене места. Међутим, то непосредно следује на основу Става 13.15;

б) Претпоставићемо да је, рецимо, први интеграл у (5) коначан.

На основу претходне тачке, за све $\gamma < d$ имамо

$$\int_c^{\gamma} \int_a^{b-} f(\alpha, x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\alpha = \int_a^{b-} \int_c^{\gamma} f(\alpha, x)\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}x.$$

На ову једнакост делујемо са $\lim\limits_{\gamma \to d-}$, па имамо

$$\int_c^{d-} \int_a^{b-} f(\alpha, x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\alpha = \lim_{\gamma \to d-} \int_a^{b-} \int_c^{\gamma} f(\alpha, x)\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}x$$

Сада још треба показати да $\lim\limits_{\gamma \to d-}$ и $\int_a^{b-}$ могу да замене места.

Посматрајмо функције

$$\Phi(x,\gamma) = \int_c^{\gamma} f(\alpha, x)\,\mathrm{d}\alpha \qquad \Phi_0(x) = \int_c^{d-} f(\alpha, x)\,\mathrm{d}\alpha.$$

Функција $\Phi(x,\gamma)$, по претпоставци конвергира ка $\Phi_0(x)$ локално равномерно по $x \in [a, b)$, кад $\gamma \to d-$.

С друге стране $\int_a^{b-} \Phi(x,\gamma)\,\mathrm{d}x$ конвергира равномерно по γ јер је

$$|\Phi(x,\gamma)| = \left|\int_c^{\gamma} f(\alpha, x)\,\mathrm{d}\alpha\right| \le \int_c^{d-} |f(\alpha, x)|\,\mathrm{d}\alpha,$$

па можемо применити Вајерштрасов критеријум. Отуда $\lim\limits_{\gamma\to d-}$ и $\int_a^{b-}$ могу да замене места на основу Става 14.11. $\Box$

Примедба: Услов непрекидности може се ослабити до услова локалне интеграбилности, јер он служи само да бисмо могли да заменимо места обичним (својственим) интегралима.

Примедба2: Ако изостане само трећи услов претходног Става б), тада се може догодити да несвојствени интеграли не могу да замене места, о чему видети вежбање 4.

ПРИМЕРИ

14.15. Дирихлеов интеграл. Под именом *Дирихлеов интеграл* познат је интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin bx}{x}\,\mathrm{d}x. \tag{6}$$

Конвергенција Дирихлеовог интеграла се једноставно проверава Дирихлеовим критеријумом. Наиме $\frac{1}{x} \searrow 0$, кад $x \to +\infty$, а $\int_0^u \sin bx\,\mathrm{d}x = \frac{1-\cos bu}{b}$, што је по апсолутној вредности мање од $2/|b|$. Његова вредност једнака је $\pi/2$, када је $b > 0$, односно $-\pi/2$ када је $b < 0$. Један од начина да се то покаже дат је у наставку.

Посматраћемо следећи интеграл који зависи од два параметра $a > 0$ и $b \in \mathbf{R}$:

$$\varphi_a(b) = \int_0^{+\infty} e^{-ax}\frac{\sin bx}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} f_a(b,x)\,\mathrm{d}x, \tag{7}$$

где је функција f_a дата са

$$f_a(b,x) = \begin{cases} e^{-ax}\dfrac{\sin bx}{x}, & x \ne 0\\ b, & x = 0\end{cases}.$$

Очигледно је и

$$\frac{\partial f_a}{\partial b}(b,x) = \begin{cases} e^{-ax}\cos bx, & x \ne 0\\ 1, & x = 0\end{cases}.$$

Услови става 14.13 су испуњени. Услов 1°, каже да је f_a диференцијабилна по b за све x, као и да је $\frac{\partial f_a}{\partial b}$ непрекидна функција, што стоји. Услов 2° тражи да интеграл (7) конвергира за бар једно b, и заиста он конвергира за све b комбинацијом Абеловог и Дирихлеовог критеријума. Наиме, како смо већ видели, интеграл (6) конвергира, док је функција $x \mapsto e^{-ax}$ опадајућа и ограничена.

Најзад, трећи услов је да интеграл изводне функције $\frac{\partial f_a}{\partial b}$ буде локално равномерно конвергентан. И то стоји, јер је

$$\left|\frac{\partial f_a}{\partial b}\right| = \left|e^{-ax}\cos bx\right| \leq e^{-ax},$$

па се моше применити Вајерштасов критеријум.

Отуда је

$$\varphi_a'(b) = \int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx\,\mathrm{d}x = \frac{a}{a^2+b^2},$$

односно

$$\varphi_a(b) = \int \frac{a\,\mathrm{d}b}{a^2+b^2} = \operatorname{arctg}\frac{b}{a} + C.$$

Константу C одређујемо стављајући $b = 0$, јер је из (7) очито да је $\varphi_a(0) = 0$, па налазимо $C = 0$. Отуда је

$$f_a(b) = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}. \tag{8}$$

Тиме смо израчунали интеграл (7), али не и (6), који је посебан случај интеграла (7), али за $a = 0$, што не можемо да употребимо, јер је читаво извођење једнакости (8) засновано на претпоставци да је $a > 0$. Међутим на ту једнакост можемо да делујемо лимесом кад $a \to 0+$. Очигледно десна страна конвергира ка $\pi/2\operatorname{sgn} b$. Леву страну означимо са $h(a)$, и применимо Став 14.11 о лимесу. У ту сврху треба показати да подинтегрална функција, посматрана као функција од a, равномерно конвергира ка $\dfrac{\sin bx}{x}$, кад $a \to 0+$. И то важи, јер је

$$\left|e^{-ax}\frac{\sin bx}{x} - \frac{\sin bx}{x}\right| = |1-e^{-ax}|\frac{|\sin bx|}{|x|} \leq \left|\frac{e^{-ax}-1}{-ax}\right|\cdot|a| \rightrightarrows 0,$$

када $a \to 0+$, јер је први чинилац у последњем изразу ограничен. Потребно је још да интеграл (7) равномерно конвергира по a из неке десне околине нуле. То видимо на основу Абеловог критеријума, јер $\int_0^{+\infty}\frac{\sin bx}{x}\,\mathrm{d}x$ конвергира равномерно по a (јер не садржи a), а функција e^{-ax} је опадајућа и равномерно ограничена бројем 1. Према Ставу 14.11, дозвољена је размена места лимеса и интеграла, па је

$$\pi/2\operatorname{sgn} b = \lim_{a\to 0+} h(a) = \int_0^{+\infty}\frac{\sin bx}{x}\,\mathrm{d}x.$$

У наредна два параграфа извешћемо Стирлингову формулу коју смо раније навели у параграфу 13.37.

14.16. Став [Лаплас]. Нека је $(a,b)\subseteq \mathbf{R}$, ($a$ може бити и $-\infty$, а b $+\infty$), и $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ конвексна функција која достиже строги минимум у тачки t_0 (тј. за $t\neq t_0$ важи $f(t)>f(t_0)$), и нека постоји $f''(t_0)$. Тада је

$$G(x)=\int_a^b e^{-xf(t)}\,\mathrm{d}t\sim\frac{\sqrt{2\pi}e^{-xf(t_0)}}{\sqrt{xf''(t_0)}},\quad x\to+\infty. \tag{9}$$

Оригинални Лапласов „доказ“ заснивао се на следећем расуђивању: На асимптотику интеграла у (9) утичу само вредности функције f у околини тачке t_0 (јер је иначе $e^{-xf(t)}$ много мање) рецимо у $((1-\varepsilon)t_0,(1+\varepsilon)t_0)$, а у тој околини апроксимирамо функцију f Тејлоровим полиномом другог степена, $f(t)\approx f(t_0)+(1/2)f''(t_0)(t-t_0)^2$, па добијамо

$$G(x)\sim\int_{(1-\varepsilon)t_0}^{(1+\varepsilon)t_0} e^{-x(f(t_0)+f''(t_0)(t-t_0)^2/2)}\,\mathrm{d}t.$$

Затим се избаци испред $e^{-xf(t_0)}$, уведе смена $\sqrt{x(t-t_0)/2}t=s$ да би се добио Пуасонов интеграл. Овакво расуђивање, наравно није коректно, али је корисно извести га пре доказа да би се разумела идеја.

Доказ. Рамотримо прво посебан случај када је $t_0=f(t_0)=0$. Тада је $a<0<b$. Јасно је да постоји и $f'(t_0)$ и да је једнак нули. Уведемо смене $\sqrt{x/2}=y$ и $t=s/y$ и имамо

$$G(x)=G(2y^2)=\int_{ya}^{yb}e^{-2y^2f(s/y)}\frac{1}{y}\,\mathrm{d}s=\frac{1}{y}\int_{ya}^{yb}\exp\left(-2s^2\frac{f(s/y)}{(s/y)^2}\right)\mathrm{d}s,$$

односно

$$yG(2y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(s,y)\,\mathrm{d}s, \tag{10}$$

где је

$$\psi(s,y)=\begin{cases}\exp\left(-2s^2\frac{f(s/y)}{(s/y)^2}\right), & ya<s<yb\\ 0, & \text{иначе}\end{cases}.$$

Циљ је да у последњи интеграл уведемо лимес кад $y\to+\infty$. Како је $f(0)=f'(0)=0$, то из Тејлорове формуле $f(u)=(1/2)f''(0)u^2+o(u^2)$, кад $u\to0$, налазимо да $f(u)/u^2\to f''(0)/2>0$, кад $u\to0$. Отуда постоји $\delta>0$ такво да је $f(s/y)/(s/y)^2>f''(0)/4$, за $s/y<\delta$. Тада је

$$\psi(s,y)\le e^{-f''(0)s^2/2},\quad s/y<\delta. \tag{11}$$

С друге стране, како је f конвексна, то за $|u|>\delta$ важи $f(u)\ge\gamma|u|$ за неко $\gamma>0$. (Заиста, $u\mapsto f(u)/u$ је нагибна функција функције f и растућа је, а лимес у нули јој је $f'(0)=0$, па се за γ може узети мањи од бројева $f(\varepsilon)/\varepsilon$ и $f(-\varepsilon)/\varepsilon$.) За $s/y>\delta$ и $y>1$ имамо $f(s/y)/|s/y|\ge\gamma$ и тиме

$$\psi(s,y)\le\exp\left(-2s^2\frac{\gamma|s/y|}{(s/y)^2}\right)=e^{-2|sy|}\le e^{-2|s|},\quad s/y>\delta. \tag{12}$$

Дакле, за функцију ψ имамо две оцене (11) за $s/y<\delta$ и (12) за $s/y>\delta$. У оба случаја важи

$$\psi(s,y)\le e^{-f''(0)s^2/2}+e^{-2|s|}\quad\text{и}\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{-f''(0)s^2/2}+e^{-2|s|})\,\mathrm{d}s<+\infty,$$

па интеграл у (10) конвергира равномерно по $y \in [1, +\infty)$. Тако је дозвољена размена лимеса и интеграла (Став 14.11), па имамо

$$\lim_{y\to+\infty} yG(2y^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{y\to+\infty} \psi(s,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-f''(0)s^2}\,\mathrm{d}s = \sqrt{\frac{\pi}{f''(0)}},$$

јер $f(s/y)/(s/y)^2 \to f''(0)/2$, и $ya \to -\infty$, $yb \to +\infty$, кад $y \to +\infty$. (Последњи интеграл се сменом $\sqrt{f''(0)}s = u$ своди на Пуасонов.)

Одатле је враћајући смену $y = \sqrt{x/2}$,

$$G(x) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{xf''(0)}}.$$

Овиме је доказ завршен у посебном случају. У општем случају, када t_0, $f(t_0) \in \mathbf{R}$ нису обавезно једнаки нули, посматрамо функцију $g(t) = f(t_0 + t) - f(t_0)$, која је такође конвексна, само на $(a - t_0, b - t_0)$, има строги минимум у нули $g(0) = 0$, и $g''(0) = f''(t_0)$. Имамо, сменом $t = t_0 + s$,

$$\begin{aligned} G(x) = \int_a^b e^{-xf(t)}\,\mathrm{d}t &= \int_{a-t_0}^{b-t_0} e^{-xf(t_0+s)}\,\mathrm{d}s = \\ &= e^{-xf(t_0)} \int_{a-t_0}^{b-t_0} e^{-xg(s)}\,\mathrm{d}s \sim e^{-xf(t_0)}\sqrt{\frac{2\pi}{xf''(t_0)}}, \quad x \to +\infty. \end{aligned}$$

□

14.17. Стирлингова формула. Важи следећа асимптотска еквиваленција

$$\Gamma(x) \sim \sqrt{2\pi}x^{x-1/2}e^{-x}, \qquad \text{кад } x \to +\infty.$$

Доказ. Идеја је да искористимо претходни Став. У том циљу представимо Γ функцију, као

$$x\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-t+x\log t}\,\mathrm{d}t.$$

Да би то добило облик интеграла у (9) уведемо смену $t = xs$, па имамо

$$x\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xs+x\log s+x\log x} x\,\mathrm{d}s,$$

односно

$$\Gamma(x) = x^x \int_0^{+\infty} e^{-xh(s)}\,\mathrm{d}s, \qquad h(s) = s - \log s.$$

Како је $h'(s) = 1 - 1/s$, $h''(s) = 1/s^2$ закључујемо да је h конвексна функција која достиже глобални минимум у тацки $s = 1$. Још је $h(1) = 1$ и $h''(1) = 1$, па применом претходног Става налазимо

$$\Gamma(x) \sim x^x \frac{\sqrt{2\pi}e^{-xh(1)}}{\sqrt{xh''(1)}} = x^x \frac{\sqrt{2\pi}e^{-x}}{\sqrt{x}},$$

чиме је доказ завршен. □

Историјска белешка: Први је асимптотско понашање факторијела утврдио де Моавр 1730. Идеја се грубо речено састоји у следећем:

$$\log n! = \log 1 + \log 2 + \cdots + \log n = \int_{1/2}^{n+1/2} \log x \,\mathrm{d}x + R_n =$$
$$= (n+1/2)\log(n+1/2) - n + C_1 + R_n =$$
$$= (n+1/2)\log n - n + (n+1/2)\log(1+1/(2n)) + C_1 + R_n,$$

где је $C_1 = -(1/2)\log(1/2)$. За остатак R_n у претходној формули се можемо надати да конвергира. Како $(n+1/2)\log(1+1/(2n)) \to 1/2$, одатле следи

$$n! \sim e^C \sqrt{n} n^n e^{-n},$$

где је $C = 1/2 + C_1 + \lim R_n$. Де Моавр је радио ипак прецизније него што је овде изложено - користио је Ојлер-Маклоренову формулу (видети вежбање 1 главе Одређени интеграл) којом се прецизније одређује разлика између коначне суме и интеграла. Он није одредио константу C у затвореном облику, већ је изразио путем бесконачног производа. Недуго затим, Стирлинг је израчунао, користећи Валисову формулу (видети вежбање 2 главе Одређени интеграл) да је $e^C = \sqrt{2\pi}$. Наш доказ Стирлингове формуле следи Лапласову идеју.

14.18. Изводи Γ-функције. Γ-функција је бесконачно пута диференцијабилна, и важи

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \log^n t \,\mathrm{d}t.$$

Доказ. Заиста последњи интеграл конвергира локално равномерно, односно конвергира равномерно по $x \in [\delta, \Delta]$, због неједнакости

$$|t^{x-1} e^{-t} \log^n t| \le t^{\Delta-1} e^{-t} |\log^n t|,$$

за $t > 1$, односно

$$|t^{x-1} e^{-t} \log^n t| \le t^{\delta-1} e^{-t} |\log^n t|,$$

за $t < 1$. Тако се (и то више пута) може применити Став о диференцирању несвојственог параметарског интеграла 14.13. □

ВЕЖБАЊА

1. Дате су функције $F(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2$ и $G(x) = -\int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$.
а) Показати да је $F'(x) = G'(x)$, па одатле извести $F(x) = \frac{\pi}{4} + G(x)$;
б) На основу тога израчунати Поасонов интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

2. Доказати да Беселова функција целог индекса $J_n(x) = \int_0^{\pi} \cos(n\varphi - x\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$ задовољава Беселову диференцијалну једначину $x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$.

3. Нека је $f : (0, +\infty) \to \mathbf{R}$ локално интеграбилна функција, таква да постоје $f(0+) = \lim\limits_{x\to 0+} f(x)$ и $f(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, Доказати да за $a, b > 0$ важе једнакости

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x}\,\mathrm{d}x = (f(+\infty) - f(0+))\log\frac{b}{a}.$$

(Фруланијеви интеграли) [Упутство: Погодним сменама показати да за $0 < u < v < +\infty$ важи $\int_u^v \frac{f(bx)-f(ax)}{x} = \int_a^b \frac{f(vt)-f(ut)}{t}\,\mathrm{d}t$, па извршити гранични прелаз.]

4. Дата је функција $f : (0,1] \times (0,1] \to \mathbf{R}$ са

$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Показати да функција f испуњава прва два услова Става 14.14б), али не и трећи. Показати да је

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \neq \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

[Упутство: Преласком на поларне координате показати да је $\iint_D |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \infty$, где је $D \subseteq (0,1]\times(0,1]$ одређен условима $0<\rho<1$, $\delta \le |\theta - \pi/4| \le \pi/4$.]

5. Испитати конвергенцију интеграла $\int_0^{+\infty} \frac{1+x^a}{1+x^{2a}}\,\mathrm{d}x$ у зависности од $a \in \mathbf{R}$. Доказати једнакост $\lim\limits_{a\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1+x^a}{1+x^{2a}}\,\mathrm{d}x = 1$.

6. Израчунати, уз образложење поступка, $\int_0^{+\infty} \frac{\log(a^2+x^2)}{b^2+x^2}\,\mathrm{d}x$.

7. Израчунати интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}\alpha x \operatorname{arctg}\beta x}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

8. Диференцирањем под знаком интеграла наћи вредност функције

$$f(y) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{x(a^2+x^2)}\,\mathrm{d}x, \quad a \neq 0.$$

[Упутство: Доказати да важи $f''(y) - a^2 f(y) = -\pi/2$.]

9. Израчунати, уз образложење поступка, интеграле: а) $J_1 = \int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\log x}\,\mathrm{d}x$, $a,b > -1$; б) $J_2 = \int_0^1 \sin(\log(1/x))\frac{x^b-x^a}{\log x}\,\mathrm{d}x$, $a,b > -1$; в) $J_3 = \int_0^1 \cos(\log(1/x))\frac{x^b-x^a}{\log x}\,\mathrm{d}x$, $a,b > -1$.

10. Израчунати $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin^\beta x}{x}\,\mathrm{d}x$, за $\alpha > 0$ и $\beta \in \mathbf{R}$.

11. Нека је $I(\alpha) = \int_{1/\alpha}^{+\infty} \frac{\log(\alpha x + \sqrt{\alpha^2x^2-1})}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$ $(\alpha > 0)$. Израчунати $I(1)$.

12. Нека је $I(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$, и $J(a) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$ за $0 < a < 1$. Испитати да ли је: а) $I(a) = \Gamma(a)\Gamma(1-a)$; б) $I(a) = J(a) + J(1-a)$; в) $J(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1-a+n}$.

13. Израчунати $J(\alpha) = \int_0^1 \frac{\sin \alpha x}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ за све $\alpha \in \mathbf{R}$.

14. За интеграл $J(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ $(a \in \mathbf{R})$: а) испитати конвергенцију овог интеграла и наћи M такво да је $|J(a)| \le M$ за све $a \in \mathbf{R}$; б) Показати да је $J'(a) + \pi/2 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$ за $a > 0$ и $J''(a) = J(a)$ за $a > 0$. [Упутство: искористити $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \pi/2$.]; в) Решити последњу једначину и наћи $J(0)$ и $J'_+(0)$ и на основу тога наћи $J(a)$; г) Наћи граничне вредности $\lim\limits_{a\to\infty} J(a)$ и $\lim\limits_{a\to+\infty} \int_0^a \left(\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}a$, знајући експлицитан израз за $J(a)$ и без тога.

15. Израчунати $J(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x(1+x^4)}\,\mathrm{d}x$, $a > 0$ показујући да важи $J^{(\mathrm{iv})}(a) + J(a) = \pi/2$.

16. Испитати конвергенцију интеграла $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x$ $(a,b\in\mathbf{R})$ и израчунати му вредност када конвергира.

17. а) Испитати обичну, апсолутну и равномерну конвергенцију интеграла
$$I(x,y)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}-e^{-yt}}{t}\cos at\,\mathrm{d}t \quad \text{и} \quad J(x,y)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}-e^{-yt}}{t}\sin at\,\mathrm{d}t,$$
где је $a\in\mathbf{R}$, па за $x,y\geq 0$ израчунати $I(x,y)$ и $J(x,y)$;

б) За $x,y\geq 0$ наћи $\lim\limits_{a\to+\infty} I(x,y)$ и $\lim\limits_{a\to+\infty} J(x,y)$ користећи резултат под а, и без њега; в) Стављајући $x=0$, $y>0$ и $\lim\limits_{y\to+\infty}$ израчунати интеграл $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

18. Израчунати интеграл $I(\alpha)=\int_1^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}\alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x$ за $\alpha\in\mathbf{R}$.

19. Дат је интеграл $J(\alpha)=\int_0^1\frac{\log(1-\alpha^2x^2)}{x\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$, $0\leq\alpha<1$. а) Испитати непрекидност функције $J(\alpha)$; б) Проверити $\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}\alpha}=\int_0^1\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\log(1-\alpha^2x^2)\right)\mathrm{d}x$, $0<\alpha<1$; в) Наћи $J(\alpha)$.

20. Израчунати $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\log(\alpha^2+x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ за $\alpha\in\mathbf{R}$.

21. Израчунати $\int_0^{+\infty}e^{-x}\frac{\sin^2\alpha x}{x^2}\,\mathrm{d}x$, $\alpha\in\mathbf{R}$ и $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

22. За $\alpha\in\mathbf{R}$, израчунати интеграле:
а) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}xe^{-\frac12x^2}\sin\alpha x\,\mathrm{d}x$;
б) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}x^2e^{-\frac12x^2}\cos\alpha x\,\mathrm{d}x$;
в) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}x^3e^{-\frac12x^2}\sin\alpha x\,\mathrm{d}x$.

23. Израчунати $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-\alpha x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x$ за $\alpha\geq 0$.

24. Израчунати $I(\alpha)=\int_0^1(\log(1/x))^\alpha\log(\log(1/x))\,\mathrm{d}x$.

25. Нека је $I(a,b)=\int_0^{+\infty}\frac{x^b\,\mathrm{d}x}{(x^a+1)(x^4+1)}$, $b\geq 0$. а) Доказати једнакост $I'_a(a,b)=-\int_0^{+\infty}\frac{x^{a+b}\log x\,\mathrm{d}x}{(x^a+1)^2(x^4+1)}$, онда када $I(a,b)$ конвергира; б) Израчунати $I(a,1)$ и $I(a,a+1)$.

26. Нека је за $0<\alpha<1$ $g(\alpha)=\int_0^1\frac{x^{-\alpha}}{1+x}\,\mathrm{d}x$, $h(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{x^{-\alpha}}{1+x}\,\mathrm{d}x$. а) Доказати $h(\alpha)=g(\alpha)+g(1-\alpha)$; $g(\alpha)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha-n}$, $h(\alpha)=\frac{1}{\alpha}+2\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha^2-n^2}$; б) Израчунати $h(\alpha)$ и $\int_0^{\infty}\frac{x^{-\alpha}\log x}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

27. Израчунати $\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}ax}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$, $(a\geq 0)$.

28. Дата је функција $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$, за $\alpha\geq 0$ са
$$f(x,\alpha)=\begin{cases}x, & 0\leq x\leq\sqrt{\alpha}\\ -x+2\sqrt{\alpha}, & \sqrt{\alpha}<x\leq 2\sqrt{\alpha}\\ 0, & 2\sqrt{\alpha}<x\end{cases},$$
а за $\alpha<0$ са $f(x,\alpha)=-f(x,-\alpha)$, и функција $h:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ са $h(\alpha)=\int_{-1}^1 f(x,\alpha)\,\mathrm{d}x$.

а) Доказати да је f непрекидна на $\mathbf{R}^2$, али да $\frac{\partial f}{\partial\alpha}$ није;
б) Доказти да је $h'(0)\neq\int_{-1}^1\frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,0)\,\mathrm{d}x$.